ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE DLA UCZESTNIKÓW VI MIĘDZYPOWIATOWEGO KONKURSU MATEMATYCZNEGO SZKÓŁ PONADGIMNAZJALNYCH

1. Sprawdź, czy liczba $b=\sqrt{16+6\sqrt{7}}+\sqrt{16-6\sqrt{7}}$ jest całkowita.
2. Wyznaczyć wartość liczbową wyrażenia $A=x^3-6x$, jeśli $x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$
3. Oblicz $\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}}-\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}$
4. Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych, które spełniają równanie $xy-2x-3y+2=0$.
5. Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=26 \\ x^3+y^3+z^3=36 \end{cases}$$
6. Rozwiąż równanie $x^2+xy+y^2=x-y-1$.
7. Oblicz wartość wyrażenia $q^4-6q^3+9q^2-7$ wiedząc, że $q^2-3q+1=0$.
8. Wykaż, że jeśli a i b są liczbami dodatnimi, to średnia arytmetyczna jest niemniejsza od średniej harmonicznej tych liczb.
9. Wykazać, że jeśli $c\in \boldsymbol{C}$ i $x=\dfrac{c+\sqrt{c^2+4}}{2}$, to $x-\dfrac{1}{x}\in \boldsymbol{C}$.
10. Funkcja f dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej x spełnia warunek $f(x)-2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\sqrt{x}$. Wyznacz f(9).
11. Niech p będzie liczbą pierwszą. Znaleźć wszystkie liczby całkowite x, dla których funkcja $f(x)=\frac{4x+8-p}{x+2}$ przyjmuje wartości całkowite.
12. Dla jakiej wartości parametru m równanie $\left||3x-6|-2\right|=m$ ma 3 rozwiązania?
13. Wykaż, że jeśli $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac,$ to $a=b=c.$
14. Oblicz pole trójkąta ostrokątnego ABC, w którym bok AB ma długość 10, środkowa AK ma długość 9, wysokość BL ma długość 8.
15. Wyznaczyć długości boków trójkątów prostokątnych, których obwód jest równy polu trójkąta.
16. Wewnątrz trójkąta równobocznego o boku długości 1 obrano punkt M odległy od wierzchołków A, B i C tego trójkąta odpowiednio o a, b i c. Wykazać, że $a^2+b^2+c^2<2$.
17. Na trapezie, którego podstawy są równe 3 i 15, opisano okrąg o środku należącym do dłuższej podstawy. Oblicz pole tego trapezu.
18. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, gdy przeciwprostokątna wynosi 4, a suma przyprostokątnych $\sqrt{18}$.
19. Na trapezie, którego podstawy są równe 3 i 15, opisano okrąg o środku należącym do dłuższej podstawy. Oblicz pole tego trapezu.
20. W okrąg o promieniu 1 wpisano kwadrat i trójkąt równoboczny mające wspólny wierzchołek. Oblicz pole części wspólnej tych figur.

21. Trzy okręgi o promieniach 2, 4, 6 są parami zewnętrznie styczne. Oblicz długość promienia okręgu przechodzącego przez punkty styczności tych okręgów.

22. Dany jest trójkąt ABC, w którym ∢ BAC = α, ∢ ABC= β oraz ∢ ACB= γ. Na bokach BC, AC i AB tego trójkąta wybrano odpowiednio punkty D, E i F w taki sposób, by AE = AF, BD = BF i CD = CE. Udowodnij, że

$$\sphericalangle EFD = \frac{\alpha+\beta}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$$

23. Na bokach BC i CD równoległoboku ABCD zbudowano (na zewnątrz równoległoboku) trójkąty równoboczne BCK i DCL. Udowodnij, że trójkąt AKL jest równoboczny.

24. W danym kwadracie ABCD o boku długości 6, w którym przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O, poprowadzono odcinek AE, gdzie E jest środkiem boku DC kwadratu ABCD. Wiedząc, że punkt M stanowi punkt przecięcia odcinka AE z przekątną BD, wyznacz pole trójkąta AMO oraz pole czworokąta CEMO.

25. Przekątne dzielą trapez na cztery trójkąty. Wykaż, że:

a) Stosunek pól tych trójkątów, w których jeden z boków jest podstawą trapezu, jest równy stosunkowi kwadratów długości podstaw trapezu.

b) Stosunek pól trójkątów takich, że bokiem jednego jest ramię trapezu, a bokiem drugiego jest podstawa trapezu, jest równy stosunkowi długości podstaw trapezu.

26. Znajdź zbiór punktów, których współrzędne spełniają równanie:

$$|y| + \frac{1}{|y|} = |x| + \frac{1}{|x|}$$