ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE DLA UCZESTNIKÓW V MIĘDZYPOWIATOWEGO KONKURSU MATEMATYCZNEGO SZKÓŁ PONADGIMNAZJALNYCH

1. Niech m będzie liczbą całkowitą nieparzystą. a) Wykaż, że liczba $m^4 - 1$ jest podzielna przez 16. b) Wykaż, że liczba $m^3 + 3m^2 - m - 3$ jest podzielna przez 48.
2. Niech $p > 2$ będzie daną liczbą pierwszą. Znajdź wszystkie liczby naturalne x i y takie, że $x^2 - y^2 = p$.
3. Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych, które spełniają równanie
   a) xy-2x-2y=3 b) $x^2 - y^2 + 9 = 4x$.
4. Znajdź wszystkie funkcje liniowe **f** spełniające równanie: **2f(x) + 3f(1 – x) = 4x – 1**
5. Znajdź wszystkie liczby całkowite x spełniające nierówność $\left|\left||x|-3\right|-2\right| < 1$.
6. Trzy różne liczby x, y, z spełniają warunek $\frac{y}{x-z} = \frac{x+y}{z} = \frac{x}{y}$. Wyznacz wartość ilorazu $\frac{x}{y}$.
7. Oblicz wartość wyrażenia $q^4 - 6q^3 + 9q^2 - 7$ wiedząc, że $q^2 - 3q + 1 = 0$. (odp. -6)
8. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{a^2 + 4b^2}{2ab}$ wiedząc, że liczby dodatnie a i b spełniają warunek $\frac{a^2 - 6b^2}{ab} = -1$. (odp. 2)
9. Znajdź cyfry A i B takie, że $\overline{AAB} + \overline{BB} = \overline{BAA}$. (Symbol typu $\overline{ABCD}$ oznacza zapis dziesiętny liczby naturalnej o cyfrach *A, B, C, D.*)
10. Wyznacz długość odcinka wspólnej stycznej do dwóch okręgów o promieniach r i R, stycznych zewnętrznie.
11. Okrąg przechodzący przez wierzchołek kąta ostrego i wierzchołki katów rozwartych rombu dzieli dłuższą przekątną rombu na dwa odcinki o długościach 25 i 7. Oblicz pole tego rombu.
12. Na bokach kwadratu zbudowano trójkąty równoboczne, których trzecie wierzchołki leżą na zewnątrz danego kwadratu. Wykaż, że łącząc te trzecie wierzchołki trójkątów otrzymujemy również kwadrat. Oblicz stosunek pól obu kwadratów.
13. W trójkącie ostrokątnym ABC długość boku AB=10, środkowej AK=9, a wysokość BL=8. Oblicz pole trójkąta ABC.
14. Przez punkt A leżący na okręgu o środku O poprowadzono styczną l oraz cięciwę AB o długości 12. Oblicz stosunek pola trójkąta BOC do pola czworokąta OBAC, jeśli BC jest cięciwą tego okręgu równoległą do prostej l i odległą od niej o 4.

15. Uzasadnij, że jeśli

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\ to\ ad=bc.$$

16. Udowodnij, że jeżeli $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ to $(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)=0$.

17. Wykaż, że liczba $\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}$ jest całkowita.

18. Wyznacz wszystkie liczby całkowite n, dla których liczba $\frac{3n-1}{n+3}$ jest całkowita.

19. W trapezie ABCD o podstawach AB i CD dane są długości przekątnych $|AC|=8\ i\ |BD|=12$ oraz pola $P_{ABG}=18\ i\ P_{CDG}=2$. Punkt G jest punktem przecięcia się przekątnych, a punkty E i F są środkami odpowiednio przekątnych BD i AC. Oblicz pole trapezu ABEF.

20. W trójkącie prostokątnym ABC o kącie prostym w wierzchołku C obrano taki punkt P, że pola trójkątów PAB, PBC i PAC są równe. Oblicz długość odcinka PC, wiedząc, że $|PA|^2+|PB|^2=m$.